МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Памятка по ключевым вопросам теории для подготовки к зачету.

1. Определение выборки (для эксперимента, состоящего в повторных независимых наблюдениях над некоторой случайной величиной).

Выборка $X=(X_1,...,X_n)$ это совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин. Сами величины X_i, $i=1,\ldots,n$ называются элементами выборки, число n — её объемом.

2. Определение эмпирической функции распределения.

Эмпирической функцией распределения называется функция, определяемая формулой:

$$F_n(x)=\frac{\mu_n(x)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e(x-X_i),$$

здесь $\mu_n(x)-$число элементов выборки, удовлетворяющих условию $X_i<x,$ а $e(x)-$ функция Хевисайда.

3. Определение распределения χ^2.

Пусть $X_1,...,X_n$ – независимые случайные величины, каждая из которых имеет стандартное нормальное распределение. Тогда распределение случайной величины

$$Y=X_1^2+\ldots+X_n^2$$

называется χ^2-распределением с n степенями свободы.

4. Определение выборочного начального момента $k-$го порядка. Определение выборочного среднего.

Выборочным начальным моментом $k-$го порядка называют величину

$$M_{nk}=M_{nk}(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^k.$$

При $k=1$ выборочный начальный момент называют выборочным средним и обозначают $\overline{X}$ Таким образом

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\ .$$

5. Определение центрального выборочного момента $k-$го порядка. Определение выборочной дисперсии.

Выборочным центральным моментом $k-$го порядка называют величину

$$M_{nk}=M_{nk}(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k.$$

При $k=2$ выборочный центральный момент называют выборочной дисперсией и обозначают $S^2=S^2(X).$ Таким образом

$$S^2(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k.$$

6. Чему равны математическое ожидание и дисперсия выборочного среднего?

Математическое ожидание выборочного среднего совпадает с математическим ожиданием генеральной совокупности. Дисперсия выборочного среднего равна дисперсии генеральной совокупности, деленной на объем выборки.

7. Определение несмещенной точечной оценки.

Оценка называется несмещенной, если ее математическое ожидание совпадает со значением оцениваемого параметра.

8. Понятие случайных чисел.

Случайные числа – это числа, которые могут рассматриваться как значения независимых одинаково распределенных случайных величин. Как правило, имеются в виду значения случайных величин с равномерным распределением вероятностей в промежутке $[0,1]$.

9. Понятие псевдослучайных чисел

Псевдослучайные числа – это числа, получаемые по какому-либо алгоритму и, следовательно, не являющиеся случайными, но имитирующие их, так как свойства псевдослучайных чисел близки к свойствам случайных чисел.

10. Определение γ-доверительного интервала.

Это случайный интервал, который содержит (накрывает) значение оцениваемого параметра с вероятностью, не меньшей γ.

11. Выписать доверительный интервал для математического ожидания в общей нормальной модели.

Пусть $\bar{X}$ – выборочное среднее, S^2 – выборочная дисперсия и $t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}$ – квантиль распределения Стьюдента с $(n-1)$ -степенью свободы, отвечающий вероятности $\frac{1+\gamma}{2}$. Доверительный интервал $\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1},\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n-1}}t_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}\right)$ содержит внутри математическое ожидание генеральной совокупности с вероятностью γ.

12. Сформулировать принцип, на котором основывается проверка статистической гипотезы.

Проверка статистической гипотезы основывается на принципе, в соответствии с которым маловероятные события считаются невозможными, а события, имеющие большую вероятность, считаются достоверными.

13. Определение ошибок первого и второго рода.

Ошибка, совершаемая при отклонении правильной основной гипотезы H_0 называется ошибкой первого рода.

Ошибка, совершаемая в том случае, когда принимается основная гипотеза, но в действительности верна альтернативная гипотеза, называется ошибкой второго рода.

14. Какова вероятность ошибки первого рода?

Вероятность ошибки первого рода равна вероятности попадания статистики критерия в критическую область, при условии, что верна гипотеза H_0.

15. Определение сходимости по вероятности.

Случайные величины $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, ...$ называются <u>сходящимися по вероятности</u> к величине A (случайной или неслучайной), если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность события $\{|\eta_n - A| < \varepsilon\}$ стремится к единице при $n \to \infty$, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\eta_n - A| < \varepsilon\} = 1.$$

Сходимость по вероятности символически записывают так:

$$\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} A.$$

16. Сформулировать закон больших чисел и центральную предельную теорему.

<u>Закон больших чисел</u>: если случайные величины $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, ...$ независимы, одинаково распределены и имеют математическое ожидание $M\eta_i = a,$ то

$$\frac{1}{n}(\eta_1 + ... + \eta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$$

(где P означает сходимость по вероятности).

<u>Центральная предельная теорема</u>: если дополнительно к предыдущему существует $D\eta_i = \sigma^2 > 0,$ то при $n \to \infty$ распределение случайной величины

$$\frac{(\eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_n - na)}{\sigma\sqrt{n}}$$

стремится к нормальному распределению $N(0,1)$.

17. Что представляет собой случайный процесс в фиксированный момент времени?

Случайный процесс в фиксированный момент времени является случайной величиной, т. е. функцией элементарного события (неразложимого исхода опыта).

18. Что означает, что случайный процесс в данный момент времени дискретен?

Это означает, что случайная величина, которым является случайный процесс в данный момент времени, дискретна, т. е. принимает конечное или счетное множество значений.

19. Что означает, что случайный процесс в данный фиксированный момент времени является непрерывной случайной величиной?

Это означает, что случайная величина, которым является случайный процесс в данный момент времени, непрерывна, т. е. имеет плотность вероятностей.

20. В каком случае случайный процесс с постоянным математическим ожиданием стационарен в широком смысле?

Когда его корреляционная функция зависит только от разности моментов времени, т. е. является функцией одной переменной.

21. Написать формулу, определяющую математическое ожидание случайного процесса, имеющего плотность вероятностей в каждый момент времени.

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,t)dx.$$

22. Написать формулу, определяющую корреляционную функцию случайного процесса, имеющего плотность вероятностей в каждый момент времени.

$$K(t_1,t_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}(t_1))(x_2 - \bar{x}(t_2))\, f(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2.$$

23. Как, зная корреляционную функцию случайного процесса, найти его дисперсию?

$$D(t) = K(t,t).$$

24. Как, зная корреляционную функцию стационарного случайного процесса, найти его спектральную плотность?

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K(\tau)d\tau.$$